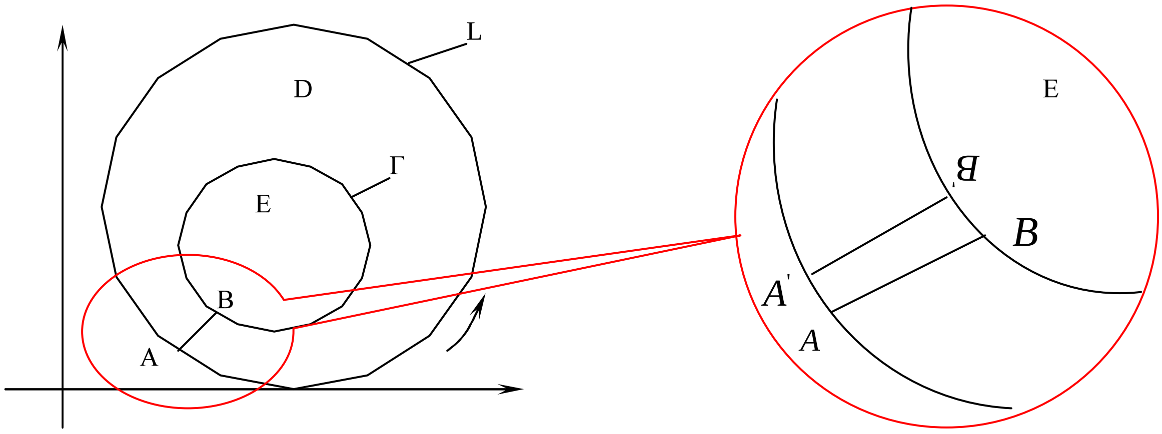
Лекция 5

Теорема Коши для многосвязных областей

Пусть область D – двусвязная, иными словами, ее нельзя стянуть в точку за счет деформации граничного контура L. Пример такой области приведен на рисунке: внутри области D содержится область E, ограниченная контуром Г.



Требуется, как и выше, найти контурный интеграл

$$I=\int\limits_L f(t)dt=?$$

Выберем произвольную точку A на L и соединим её с точкой B на Г. По отрезку AB выполним математический разрез (разрез, не имеющий ширины), как показано на рисунке справа. Точка A совпадает с точкой A', а B – с B'. Разрезанная таким образом область превращается в односвязную с граничным контуром $AA'B'BA$.

Будем двигаться так (вдоль контура): $A \to A' \to B' \to B \to A$. В этом случае разобранная выше теорема Коши дает:

$$\int\limits_{AA'} f(t)dt+\int\limits_{A'B'} f(t)dt+\int\limits_{B'B} f(t)dt+\int\limits_{BA} f(t)dt=0.$$

$$\int\limits_L f(t)dt-\int\limits_\Gamma f(t)dt=0 \Rightarrow \int\limits_L f(t)dt=\int\limits_\Gamma f(t)dt.$$

В общем случае, когда область D есть $(n+1)$-связная область, то есть содержит внутри себя n областей, получается: $\int\limits_L f(t)dt=\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_i} f(t)dt$

Теорема Морера

Пусть $f(z,\overline{z})$ *- функция, непрерывная в области D. Если для любого замкнутого непересекающегося контура, целиком лежащего в области D, справедливо равенство* $\int\limits_L f(t,\overline{t})dt=0$, *то функция* $f(z,\overline{z})\equiv f(z)$ *голоморфна в области D.*

Доказательство:

$$f(t,\overline{t})=u+iv; \quad dt=dx+idy$$

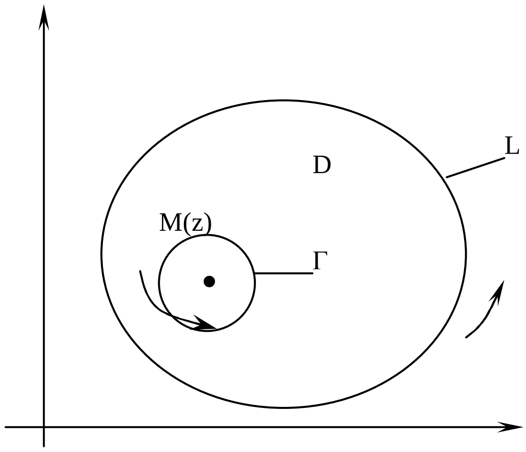
$$\int\limits_L f(t,\overline{t})dt=\int\limits_L (u+iv)(dx+idy)=$$

$$=\int\limits_L \left[(udx-vdy)+i(vdx+udy)\right]=0$$

откуда следуют условия Коши-Римана.

Интеграл Коши

Рассмотрим некоторую функцию $f(z)$, голоморфную в односвязной области D. На контуре L функция не обязательно голоморфна, но обязательно непрерывна. Она также непрерывно продолжима на контур L из любой внутренней точки области D. Пусть z - некоторая внутренняя точка области D.



При этом справедлива формула $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{f(t)dt}{t-z}$ - *формула Коши.*

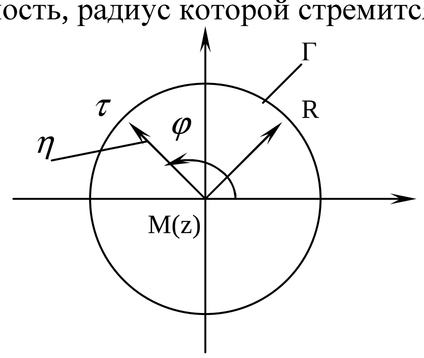
<u>Доказательство</u>:

Рассмотрим функцию $F(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ - голоморфную в области D за исключением точки M с координатой z, где она не определена.

Окружим точку $M(z)$ контуром Г. Тогда по теореме Коши для многосвязных областей получим

$$\int_L \frac{f(t)dt}{t-z} - \int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z} = 0$$

Так как функция $F(\xi)$ голоморфна повсюду, кроме точки z, то контур Г – произвольный. Нужно лишь, чтобы он охватывал точку M и лежал внутри контура L. В качестве Г возьмём окружность, радиус которой стремится к нулю.



Введём локальную систему координат с центром в точке M. Пусть $\eta = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Выполним предельный переход

$$\lim_{R\to 0}\int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z} = \langle \tau = z + \eta \rangle = f(z)\lim_{R\to 0}\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - z} = \lim_{R\to 0}\int_\Gamma \frac{d\eta}{\eta}$$

$$d\eta = Ri(i\sin\varphi + \cos\varphi)d\varphi = i\eta d\varphi$$

$$\lim_{R\to 0}\int_{\Gamma}\frac{d\eta}{\eta} = \int_{0}^{2\pi}\frac{i\eta d\varphi}{\eta} = 2\pi i$$

$$\int_{L}\frac{f(t)dt}{t-z} = 2\pi i f(z) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(t)dt}{t-z}$$ - интеграл Коши